ピタゴラス数は無限に存在する

等式 $a^2+b^2=c^2$ を満たす正の整数の組として，

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$，$(5,\ 12,\ 13)$，$(8,\ 15,\ 17)$ などが知られている。

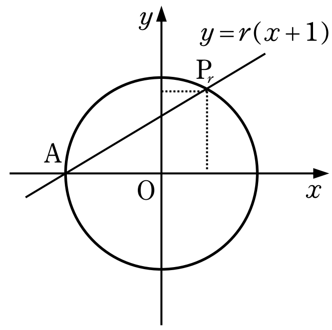
この等式 $a^2+b^2=c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ のことを**ピタゴラス数**という。

$(3,\ 4,\ 5)$，$(6,\ 8,\ 10)$，$(9,\ 12,\ 15)$ のように，比が等しいものは同じとみなして，異なる種類のものについて考える。その意味で，ピタゴラス数は無限に存在することを証明してみよう。

〔証明〕

r を正の有理数とし，$r=\dfrac{m}{n}$（$m,\ n$ は互いに素な正の整数）とする。

直線 $l_r : y=r(x+1)$ と円 $C : x^2+y^2=1$ を考える。



これらの交点を求めてみよう。

$y=r(x+1)$ を $x^2+y^2=1$ に代入して，

$x^2+\{r(x+1)\}^2=1$

整理すると，$(1+r^2)x^2+2r^2x+r^2-1=0$

$(x+1)\left\{(1+r^2)x^2+r^2-1\right\}=0$

$\therefore\quad x=-1,\ \dfrac{1-r^2}{1+r^2}$

$y=r(x+1)$ より，

$x=-1$ のとき $y=0$

$x=\dfrac{1-r^2}{1+r^2}$ のとき，$y=r\left\{\dfrac{1-r^2}{1+r^2}+1\right\}=\dfrac{2r}{1+r^2}$

$\mathrm{P}_r\left(\dfrac{1-r^2}{1+r^2},\ \dfrac{2r}{1+r^2}\right)$ とすると，$r=\dfrac{m}{n}$ を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_r}=\left(\frac{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2},\ \frac{2\left(\frac{m}{n}\right)}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\right)=\left(\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2},\ \frac{2mn}{n^2+m^2}\right)=\frac{1}{m^2+n^2}\left(n^2-m^2,\ 2mn\right)$$

$r'=\dfrac{m'}{n'}$（$m',\ n'$ は互いに素な正の整数）とおくと，

$r\neq r'$ のとき $l_r,\ l_{r'}$ は異なる直線だから，$\mathrm{P}_r\neq\mathrm{P}_{r'}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_r}\nparallel\overrightarrow{\mathrm{OP}_{r'}}$ である。

すなわち，$\left(n^2-m^2,\ 2mn\right)\nparallel\left(n'^2-m'^2,\ 2m'n'\right)$ である。

この結果から，$n>m$ のとき，$\left(n^2-m^2,\ 2mn,\ n^2+m^2\right)$ はピタゴラス数であり，

$\dfrac{m}{n}\neq\dfrac{m'}{n'}$ のとき，$\left(n^2-m^2,\ 2mn,\ n^2+m^2\right)$ と $\left(n'^2-m'^2,\ 2m'n',\ n'^2+m'^2\right)$ は異なるピタゴラス数であり，異なる既約分数 $r=\dfrac{m}{n}$（$m<n$）だけ異なるピタゴラス数 $\left(n^2-m^2,\ 2mn,\ n^2+m^2\right)$ が存在するから，無限個存在する。